Notación de Dirac y diagonalización

Resultados de la clase anterior

Base ortonormal $\gamma = \{|u_i\rangle : i \in I\}$

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad \sum_{i\in I} |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{i\in I} a_i |u_i\rangle$$

$$a_i = \langle u_i | \alpha\rangle \Rightarrow \begin{cases} [|\alpha\rangle]_\gamma = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle u_N|\alpha\rangle \end{pmatrix} \\ [\langle\alpha|]_\gamma = (a_1^* \dots a_N^*) \end{cases}$$

$$\langle\alpha| = \sum_{i\in I} a_i^* \langle u_i|$$

Para $\hat{A}$ un operador, sus elementos de matriz son son $A_{ij} = \langle u_i | \hat{A} | u_j \rangle$

fila columna

$$\hat{A} = \sum_{i,j} A_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|$$

$$[|u_{i_0}\rangle\langle u_{j_0}|]_\gamma = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \iddots & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \iddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i_0 \\ \uparrow j_0 & \end{array}$$

Otra forma de verlo:

$$\hat{B} = |u_{i_0}\rangle\langle u_{j_0}|$$

$$B_{ij} = \langle u_i | \hat{B} | u_j \rangle = \langle u_i | u_{i_0}\rangle\langle u_{j_0} | u_j \rangle = \delta_{i i_0} \delta_{j, j_0}$$

B_{ij} es cero excepto cuando $i = i_0$ y $j = j_0$

Ejemplos

el orden importa

Base ortonormal $\gamma = \{|a\rangle, |b\rangle\}$

1) Para $|\psi\rangle = |a\rangle + |b\rangle$

¿Cómo es $[|\psi\rangle]_\gamma$?

$$[|\psi\rangle]_\gamma = \begin{pmatrix} \langle a|\psi\rangle \\ \langle b|\psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{1}{\cancel{\langle a|a\rangle}} + \overset{0}{\cancel{\langle a|b\rangle}} \\ \overset{0}{\cancel{\langle b|a\rangle}} + \overset{1}{\cancel{\langle b|b\rangle}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siguiendo el orden de la base

2) $\hat{A} = |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|$

Representación matricial

$$[\hat{A}]_\gamma = \begin{pmatrix} \langle a|\hat{A}|a\rangle & \langle a|\hat{A}|b\rangle \\ \langle b|\hat{A}|a\rangle & \langle b|\hat{A}|b\rangle \end{pmatrix}$$

2x2 porque la base tiene 2 elementos

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = \langle a|\Big[|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|\Big]|a\rangle$$

Tener cuidado de distribuir todo

$$= \langle a|a\rangle \overset{0}{\cancel{\langle b|a\rangle}} + \overset{0}{\cancel{\langle a|b\rangle}}\langle a|a\rangle$$
$$= 0$$

$\langle b|\hat{A}|b\rangle = 0$ análogo (inténtenlo)

$\langle a|\hat{A}|b\rangle$ (inténtenlo también)

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \langle a|\left(|a\rangle\langle b| + \cancel{|b\rangle\langle a|}\right)|b\rangle = 1$$

$$\langle b|\hat{A}|a\rangle = 1 \quad (\text{análogo})$$

$$\therefore \quad [\hat{A}]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si la base fuera $|a\rangle, |b\rangle, \ldots, |z\rangle$
$\hat{A} = |a\rangle\langle f|$ representa una matriz de 25×25

Calculemos las componentes de $A|\psi\rangle$.

- Dados $|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |u_i\rangle$ y $A = \sum_{i,j} A_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|$

cambiar a k

$$A|\psi\rangle = \left(\sum_{i,j} A_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|\right)\left(\sum_k \psi_k |u_k\rangle\right) = \sum_{i,j,k} A_{ij}\psi_k |u_i\rangle \overbrace{\langle u_j|u_k\rangle}^{\delta_{jk}}$$

$$= \sum_{i,j} A_{ij}\psi_j |u_i\rangle$$

¿Cómo se calcula $\langle\phi|A|\psi\rangle$ a partir de las componentes?

$$\underbrace{\langle\phi|A|\psi\rangle}_{\text{número}} = \sum_{ij} \phi_i^* A_{ij} \psi_j$$

- El conjugado hermitiano (Relación entre $\hat{A}$ y $\hat{A}^+$).

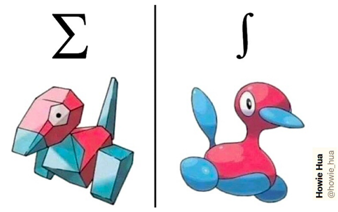
$$(\hat{A}^+)_{ij} = \langle u_i|\hat{A}^+|u_j\rangle = \langle u_j|\hat{A}|u_i\rangle^* = A_{ji}^*$$

transpuesto $ij \leftrightarrow ji$ y conjugado.

- Los operadores que cumplen $\hat{A} = \hat{A}^+$ se llaman hermitianos o autoadjuntos

- Los elementos diagonales de un hermitiano son reales pues son iguales a su conjugado.

Bases continuas



	Base discreta	Base continua
cardinalidad	finita o numerable	no numerable
ortonormal	Kronecker $\langle u_i \| u_j \rangle = \delta_{ij}$	Dirac $\langle w_\alpha \| w_{\alpha'} \rangle = \delta(\alpha - \alpha')$
componentes	$\|\psi\rangle = \sum_i c_i \|u_i\rangle$	$\|\psi\rangle = \int d\alpha \, C(\alpha) \|w_\alpha\rangle$
	$\psi_j = \langle u_j \| \psi \rangle$	$\psi(\alpha) = \langle w_\alpha \| \psi \rangle$
	Sucesión	función de α
Completez	$\sum \|u_i\rangle\langle u_i\| = \mathbb{1}$	$\int d\alpha \, \|w_\alpha\rangle\langle w_\alpha\| = \mathbb{1}$
Matrices	$A_{ij} = \langle u_i \| A \| u_j \rangle$	$A(\alpha, \alpha') = \langle w_\alpha \| A \| w_{\alpha'} \rangle$
Producto punto	$\langle \varphi \| \psi \rangle = \sum \varphi_i^* \psi_i$	$\langle \varphi \| \psi \rangle = \int \varphi^*(\alpha) \psi(\alpha) \, d\alpha$

Las bases continuas son útiles como una idealización matemática (como ondas planas)

Ejemplo de base continua $\{|\vec{r}\rangle\}, \{|\vec{p}\rangle\}$

$$\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle \quad ; \quad \psi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle$$